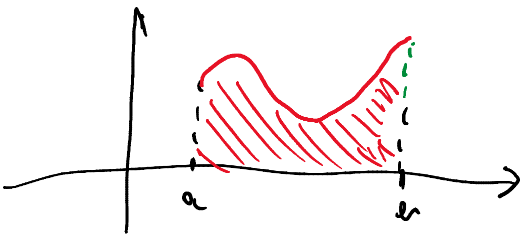
Lezione 26

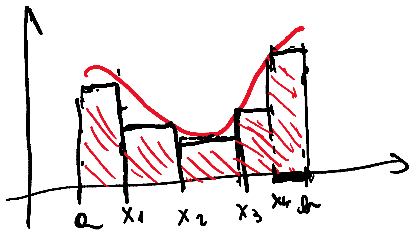
lunedì 29 novembre 2021 09:02

Integrali definiti

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, vogliamo calcolare l'area sotto il grafico di f. $\quad (f \geq 0)$.

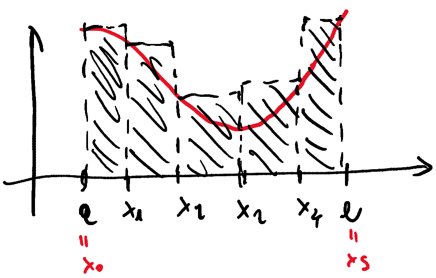


L'idea è approssimare la figura con rettangoli.



La somma delle aree dei rettangoli è un'approssimazione dal basso dell'area sotto il grafico di f.

Posso approssimare l'area anche dall'alto:



Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Una **SUDDIVISIONE** di $[a,b]$ è un insieme $D = \{x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n\} \subseteq [a, b]$ tale che $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots \leq x_n = b$.

OSS

Se $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è una suddivisione di $[a,b]$, allora

$$[a,b] = [x_0,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$
$$= \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$$

Def: Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.
Sia D una suddivisione di $[a,b]$. $(D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$

- Definiamo SOMMA INFERIORE di f rispetto a D:
$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$
- Definiamo SOMMA SUPERIORE di f rispetto a D:
$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

OSS

Se D_1 e D_2 sono due suddivisioni (anche diverse) di $[a,b]$ allora $s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$.

Consideriamo gli insiemi:

$I_{inf} = \{ s(f,D) \mid D$ suddivisione di $[a,b]\}$

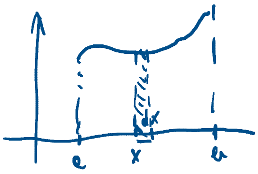
$I_{sup} = \{ S(f,D) \mid D$ " " "$\}$

I_{inf} è superiormente limitato e

I_{sup} è inferiormente limitato

Def: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata si dice f è **RIEMANN INTEGRABILE** in $[a,b]$ se $\inf I_{sup} = \sup I_{inf}$. In tal caso definiamo **INTEGRALE** di f in $[a,b]$ il numero

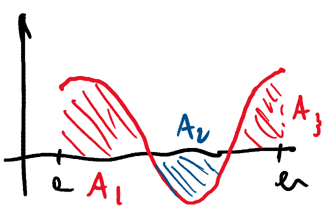
$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf I_{sup} = \sup I_{inf}.$$



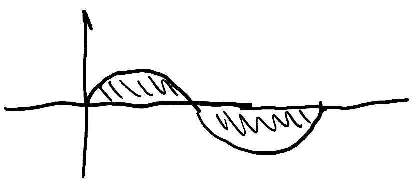
Interpretazione

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile e $f\geq 0$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ è l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x nell'intervallo $[a,b]$.

Se f cambia segno le parti in cui $f\leq 0$ vengono contate con segno negativo



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$



$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0.$$

TEOREMA (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE)

Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona e limitata allora f è integrabile in $[a, b]$

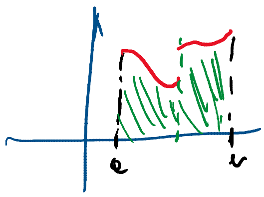
$(f \in \underbrace{R(a, b)}_{\text{insieme}})$ delle funzioni integrabili in $[a, b]$.

TEOREMA (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE)

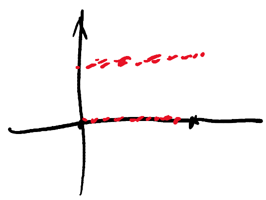
Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ allora $f \in R(a, b)$.

TEOREMA

Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata e ha un numero finito di punti di discontinuità, allora f è integrabile in $[a, b]$.



Se $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$



f non è integrabile in $[0, 1]$.

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DEFINITI

Siano $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in $[a, b]$. Allora:

1) $\alpha f + \beta g$ è integrabile $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e

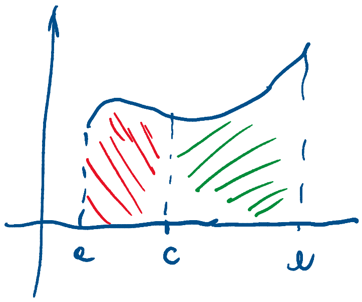
$$\int_a^b \alpha f + \beta g \, dx = \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx.$$

(linearità dell'integrale).

2) Se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$ (monotonia degli integrali)

3) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$



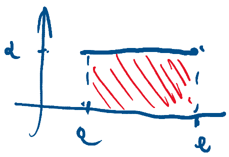
4) Se $c \in [a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(additività degli integrali rispetto al dominio)

5) $$\int_a^b \alpha \, dx = \alpha\,(b-a)$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$.



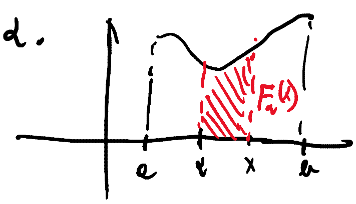
<u>Notazione</u>

Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ poniamo

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx .$$

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$.
Se fissiamo $\alpha \in [a,b]$ possiamo definire la funzione $F_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$

F_α si dice FUNZIONE INTEGRALE di f con punto base α.



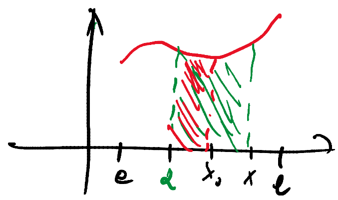
TEOREMA

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$ allora $F_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$.
(questo vale $\forall \alpha \in [a,b]$).

DIM

Bisogna far vedere che $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \quad \forall x_0 \in [a,b]$.
(cioè $\lim_{x \to x_0} F(x) - F(x_0) = 0$)

Assumiamo per il momento che $x > x_0$.



$$F(x) - F(x_0) = \int_\alpha^x f(t)\,dt - \int_\alpha^{x_0} f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Se $M = \sup_{[a,b]} |f(x)|$ allora

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_{x_0}^x M \,dt = M(x - x_0)$$

Allora: $\underbrace{-M(x-x_0)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0} \leq F(x) - F(x_0) \leq \underbrace{M(x-x_0)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$

per il Teorema dei Carabinieri: $\lim_{x \to x_0^+} F(x) - F(x_0) = 0$

In modo simile si fa il caso $x \to x_0^-$. $\square$.

TEOREMA (1° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$ e continua in $x_0 \in [a,b]$, allora $\forall \alpha \in [a,b]$ si ha che F_α è derivabile in x_0 e $F_\alpha'(x_0) = f(x_0)$.

DIMOSTRAZIONE

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0}$$

Sappiamo che f è continua in x_0 quindi:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\Downarrow \quad f(x_0-\varepsilon) < f(t) < f(x_0) + \varepsilon \quad \forall t \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$

Se $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ allora $t \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad \forall t \in [x_0, x]$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \le \int_{x_0}^{x} (f(x_0) + \varepsilon)\,dt = (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \ge \int_{x_0}^{x} (f(x_0) - \varepsilon)\,dt = (f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0).$$

$$f(x_0) - \varepsilon \le \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} \le f(x_0) + \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

allora $$\lim_{x \to x_0} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \Rightarrow F_a'(x_0) = f(x_0).$$

OSS

Se f è continua in $[a,b]$ allora F_a è derivabile in $[a,b]$ e $F_a'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Def: Una $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice **PRIMITIVA** di $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ se F è derivabile in tutti i punti di $[a,b]$ e $F' = f$.

ESEMPI

$f(x) = 1$ (funzione costante)

Una primitiva di f in $\mathbb{R}$ è $F(x) = x$

$F(x) = x + 17$

$F(x) = x + c$
queste sono tutte primitive

- $f(x) = \sin x$

Una primitive in $\mathbb{R}$ è $f(x) = -\cos x$

Posso prendere più in generale $f(x) = -\cos x + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

OSS

Se F_1 e F_2 sono due primitive di una funzione $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in $[a,b]$ allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$F_2(x) = F_1(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$

$(F_1 - F_2$ è costante in $[a,b])$

DIM

Se sono due primitive, allora

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

$$(F_2 - F_1)' = 0 \Rightarrow (F_2 - F_1)' \geq 0 \text{ in } [a,b] \Rightarrow$$

$\Rightarrow F_2 - F_1$ è monotona crescente in $[a,b]$

$$(F_2 - F_1)' = 0 \Rightarrow (F_2 - F_1)' \leq 0 \text{ in } [a,b] \Rightarrow$$

$F_2 - F_1$ è motona decrescente in $[a,b]$

Quindi $F_2 - F_1$ è costante $\square$.

- Idea per calcolare gli integrali definiti:

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Fissia $\alpha\in[a,b]$. F_α è una primitiva di f. Se conosciamo una funzione F che è una primitiva di f allora $F_\alpha(x) = F(x) + c$ con $c\in\mathbb{R}$.

La costante c si determina usando il fatto che $F_\alpha(\alpha) = 0$.

TEOREMA (II TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e F è una primitiva in $[a,b]$ di f, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DIM

Consideriamo la funzione integrale $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Allora $F_a(a) = 0$ e $F_a'(x) = f(x)$ $\forall x\in[a,b]$ (per il I teorema fondamentale). Allora $\exists\, c \in\mathbb{R}$ t.c. $F_a(x) = F(x) + c$.

Dato che $F_a(a) = 0$, $0 = F(a) + c \Rightarrow c = -F(a)$

Cioè $F_a(x) = F(x) - F(a)$ $\forall x\in[a,b]$

In particolare

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_a(b) = F(b) - F(a). \qquad \square$$

Ricapitoliamo:

Come si calcola $\int_a^b f(x)\,dx$?

1) Trovare una primitiva F di f

2) Si calcola
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

ESEMPIO

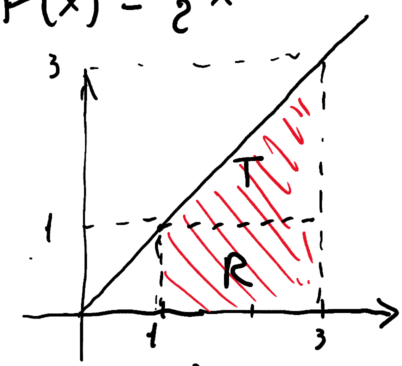
$$\int_1^3 x\,dx = ?$$

$f(x) = x$

Cerchiamo una primitiva: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$F(3) = \frac{9}{2}$, $F(1) = \frac{1}{2}$

$$\int_1^3 x\,dx = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$



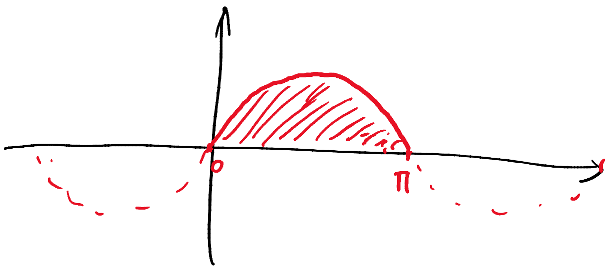
$\text{Area}(R) = 2$

$\text{Area}(T) = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

$\text{Area} = 2 + 2 = 4.$

ESEMPIO:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = ?$$



$f(x) = \sin x$

$F(x) = -\cos x$

$F(\pi) = -\cos\pi = 1$

$F(0) = -\cos 0 = -1$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 1 - (-1) = 1+1 = 2.$$

Notiamo invece che

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = F(2\pi) - F(0) = -1 - (-1) = -1+1 = 0$$

Notazione:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \Big[F(x) \Big]_a^b$$

ESEMPIO

$$\int_0^2 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{2} 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 0 = 2$$

Per calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ dobbiamo trovare le primitive di $f(x)$ in $[a,b]$.
Si usa un simbolo per indicare le primitive.

Def: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si dice INTEGRALE INDEFINITO di f l'insieme ~~dell~~ delle primitive di f.
Si indica con $\int f(x)\,dx$.

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva, si scrive che

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

ESEMPI

- $\int 1 \, dx = x + c$
- $\int \alpha \, dx = \alpha x + c \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
- $\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + c$
- $\int \alpha x \, dx = \frac{\alpha}{2} x^2 + c \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
- $\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + c$
- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log x + c$ in $(0,+\infty)$

  $\int \frac{1}{x} \, dx = \log(-x) + c$ in $(-\infty, 0)$

  Si scrive

  $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + c$ in $(-\infty,0)$ o in $(0,+\infty)$.
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$
- $\int e^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c.$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
- $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C$

$$\arccos x = -\arcsin x + \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

- $\displaystyle\int a^x\,dx = \int e^{\log a^x}\,dx = \int e^{x\log a}\,dx$

$$= \frac{1}{\log a} e^{x\log a} + C$$

$$= \frac{a^x}{\log a} + C.$$

Attenzione a non confondere i due tipi di integrale

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C \qquad \text{(integrale indefinito)}$$

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}.$$

(integrale def. in $[0, 1]$).